CENGAGE Learning

cálculo

Tradução da 7ª edição norte-americana **Volume 1**

trilha

James Stewart

CÁLCULO

VOLUME I

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Stewart, James
Cálculo, volume I / James Stewart ;
[tradução EZ2 Translate]. -- São Paulo :
Cengage Learning, 2013.

Título original: Cauculus : early
transcendentals
7. ed. americana.
Bibliografia.
ISBN 978-85-221-1461-0

1. Cálculo 2. Cálculo - Problemas, exercícios
etc. I. Título.

13-04310 CDD-515-515.076

Índices para catálogo sistemático:
1. Cálculo : Matemática 515
2. Exercícios : Cálculo : Matemática 515.076
3. Problemas : Cálculo : Matemática 515.076

CÁLCULO

VOLUME I

Tradução da 7ª edição norte-americana

JAMES STEWART

McMaster University
e
University of Toronto

Tradução:
EZ2Translate

Revisão técnica:
Eduardo Garibaldi
Professor Doutor da Universidade Estadual
de Campinas (Unicamp)

CENGAGE Learning®

Austrália • Brasil • Japão • Coreia • México • Cingapura • Espanha • Reino Unido • Estados Unidos

Cálculo – Volume I – Tradução da 7ª edição norte-americana
Versão métrica internacional
James Stewart

Gerente Editorial: Patricia La Rosa

Supervisora Editorial: Noelma Brocanelli

Supervisora de Produção Gráfica: Fabiana Alencar Albuquerque

Editora de Desenvolvimento: Gisela Carnicelli

Título Original: Calculus – Early transcendentals
ISBN-13: 978-0-538-49887-6
ISBN-10: 0-538-49887-0

Tradução: EZ2Translate

Tradução técnica da 6ª edição: Antonio Carlos Moretti e Antonio Carlos Gilli Martins

Revisão Técnica: Eduardo Garibaldi

Cotejo e revisão: Monalisa Neves, Cristiane Morinaga e Mônica Aguiar

Editora de direitos de aquisição e iconografia: Vivian Rosa

Diagramação: Cia. Editorial e Celina Hida

Capa: Sergio Bergocce

Impresso no Brasil.
Printed in Brazil.
1 2 3 4 5 6 7 16 15 14 13

© 2012, 2008 Brooks/Cole, parte da Cengage Learning
© 2014 Cengage Learning Edições Ltda.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste livro poderá ser reproduzida, sejam quais forem os meios empregados, sem a permissão, por escrito, da Editora. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei no 9.610, de 19 de fevereiro de 1998.

Para informações sobre nossos produtos,
entre em contato pelo telefone **0800 11 19 39**
Para permissão de uso de material desta obra,
envie seu pedido
para **direitosautorais@cengage.com**

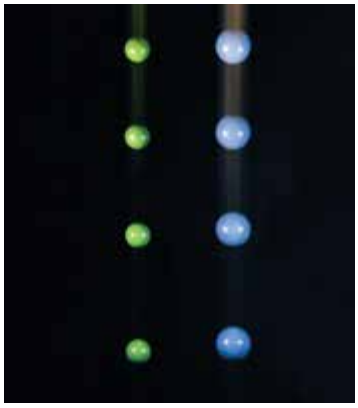
© 2014 Cengage Learning. Todos os direitos reservados.

ISBN 13: 978-85-221-1461-0
ISBN 10: 85-221-1461-7

Cengage Learning
Condomínio E-Business Park
Rua Werner Siemens, 111 – Prédio 20 – Espaço 04
Lapa de Baixo – CEP 05069-900
São Paulo – SP
Tel.: (11) 3665-9900 – Fax: (11) 3665-9901
SAC: 0800 11 19 39

Para suas soluções de curso e aprendizado, visite
www.cengage.com.br

Sumário



Prefácio IX

Testes de Verificação XXI

UMA APRESENTAÇÃO DO CÁLCULO 1

1 Funções e Modelos 9

1.1 Quatro Maneiras de Representar uma Função 10
1.2 Modelos Matemáticos: Uma Lista de Funções Essenciais 22
1.3 Novas Funções a Partir de Conhecidas 34
1.4 Calculadoras Gráficas e Computadores 42
1.5 Funções Exponenciais 48
1.6 Funções Inversas e Logaritmos 55
Revisão 66
Princípios da Resolução de Problemas 69

2 Limites e Derivadas 75

2.1 Os problemas da Tangente e da Velocidade 76
2.2 O Limite de uma Função 80
2.3 Cálculos Usando Propriedades dos Limites 91
2.4 A Definição Precisa de um Limite 100
2.5 Continuidade 109
2.6 Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais 119
2.7 Derivadas e Taxas de Variação 131
Projeto Escrito ■ Métodos Iniciais para Encontrar Tangentes 139
2.8 A Derivada como uma Função 140
Revisão 150
Problemas Quentes 154

3 Regras de Derivação 157

3.1 Derivadas de Funções Polinomiais e Exponenciais 158
Projeto Aplicado ■ Construindo uma Montanha-Russa Melhor 166
3.2 As Regras do Produto e do Quociente 167
3.3 Derivadas de Funções Trigonométricas 173
3.4 A Regra da Cadeia 179
Projeto Aplicado ■ Onde um Piloto Deve Iniciar a Descida? 188
3.5 Derivação Implícita 188
Projeto Aplicado ■ Famílias de Curvas Implícitas 196
3.6 Derivadas de Funções Logarítmicas 196

3.7 Taxas de Variação nas Ciências Naturais e Sociais 201
3.8 Crescimento e Decaimento Exponenciais 213
3.9 Taxas Relacionadas 220
3.10 Aproximações Lineares e Diferenciais 226
Projeto Aplicado ■ Polinômios de Taylor 231
3.11 Funções Hiperbólicas 232
Revisão 238
Problemas Quentes 241

4 Aplicações de Derivação 247

4.1 Valores Máximo e Mínimo 248
Projeto Aplicado ■ O Cálculo do Arcos-Íris 256
4.2 O Teorema do Valor Médio 257
4.3 Como as Derivadas Afetam a Forma de um Gráfico 262
4.4 Formas Indeterminadas e Regra de l'Hôspital 272
Projeto Escrito ■ As Origens da Regra de l'Hôspital 280
4.5 Resumo do Esboço de Curvas 280
4.6 Representação Gráfica com Cálculo e Calculadoras 287
4.7 Problemas de Otimização 294
Projeto Aplicado ■ A Forma de uma Lata 304
4.8 Método de Newton 305
4.9 Primitivas 310
Revisão 317
Problemas Quentes 320

5 Integrais 325

5.1 Áreas e Distâncias 326
5.2 A Integral Definida 337
Projeto de Descoberta ■ Funções Área 349
5.3 O Teorema Fundamental do Cálculo 350
5.4 Integrais Indefinidas e o Teorema da Variação Total 360
Projeto Escrito ■ Newton, Leibniz e a Invenção do Cálculo 368
5.5 A Regra da Substituição 369
Revisão 376
Problemas Quentes 379

6 Aplicações de Integração 381

6.1 Áreas entre as Curvas 382
Projeto Aplicado ■ O Índice de Gini 388
6.2 Volumes 389
6.3 Volumes por Cascas Cilíndricas 399
6.4 Trabalho 404
6.5 Valor Médio de uma Função 409
Projeto Aplicado ■ Cálculos e Beisebol 412
Projeto Aplicado ■ Onde Sentar-se no Cinema 413
Revisão 413
Problemas Quentes 415

7 Técnicas de Integração 419

7.1 Integração por Partes 420
7.2 Integrais Trigonométricas 425
7.3 Substituição Trigonométrica 431
7.4 Integração de Funções Racionais por Frações Parciais 438
7.5 Estratégias para Integração 447
7.6 Integração Usando Tabelas e Sistemas de Computação Algébrica 452
Projeto de Descoberta ■ Padrões em Integrais 457
7.7 Integração Aproximada 458
7.8 Integrais Impróprias 470
Revisão 479
Problemas Quentes 483

8 Mais Aplicações de Integração 487

8.1 Comprimento de Arco 488
Projeto de Descoberta ■ Torneio de Comprimento de Arcos 494
8.2 Área de uma Superfície de Revolução 495
Projeto de Descoberta ■ Rotação em Torno de uma Reta Inclinada 500
8.3 Aplicações à Física e à Engenharia 501
Projeto de Descoberta ■ Xícaras de Café Complementares 510
8.4 Aplicações à Economia e à Biologia 511
8.5 Probabilidade 515
Revisão 521
Problemas Quentes 523

Apêndices A1

A Números, Desigualdades e Valores Absolutos A2
B Geometria Analítica e Retas A9
C Gráficos de Equações de Segundo Grau A14
D Trigonometria A21
E Notação de Somatória (ou Notação Sigma) A30
F Demonstração dos Teoremas A35
G O Logaritmo Definido como uma Integral A44
H Números Complexos A51
I Respostas para os Exercícios Ímpares A58

Índice Remissivo I1

Volume II

Capítulo 9 Equações Diferenciais
Capítulo 10 Equações Paramétricas e Coordenadas Polares
Capítulo 11 Sequências e Séries Infinitas
Capítulo 12 Vetores e a Geometria do Espaço
Capítulo 13 Funções Vetoriais
Capítulo 14 Derivadas Parciais
Capítulo 15 Integrais Múltiplas
Capítulo 16 Cálculo Vetorial
Capítulo 17 Equações Diferenciais de Segunda Ordem

Prefácio

Esta edição difere da original de *Cálculo,* sétima edição, em vários aspectos.

As unidades utilizadas em quase todos os exemplos e exercícios foram alteradas de unidades habituais dos EUA para unidades métricas. Há um pequeno número de exceções: em algumas aplicações de engenharia (principalmente na Seção 8.3) pode ser útil alguns engenheiros familiarizarem-se com unidades norte-americanas. E eu quis manter alguns exercícios (por exemplo, aqueles envolvendo beisebol) nos quais seria inapropriado o uso de unidades métricas.

Alterei os exemplos e exercícios envolvendo dados reais para que eles passassem a ter abrangência internacional, de modo que a grande maioria agora vem de outros países além dos Estados Unidos. Por exemplo, agora há exercícios e exemplos referentes a tarifas postais em Hong Kong; dívida pública canadense; índices de desemprego na Austrália; horas de luz do dia em Ancara, na Turquia; isotermas na China; porcentagem da população na zona rural da Argentina; populações da Malásia, Indonésia, México e Índia; consumo de energia em Ontário, entre muitos outros.

Além de modificar os exercícios para que as unidades sejam métricas e os dados tenham abrangência internacional, uma série de outros também foi modificada, o que resulta em cerca de 10% dos exercícios diferentes daqueles da versão original.

Filosofia do Livro

A arte de ensinar, disse Mark Van Doren, é a arte de auxiliar a descoberta. Eu tentei escrever um livro que auxilie os estudantes a descobrirem o cálculo – tanto seu poder prático quanto sua surpreendente beleza. Nesta edição, assim como nas seis primeiras, minha intenção é transmitir ao estudante uma noção da utilidade do cálculo e desenvolver a competência técnica, mas também me esforço para propiciar certo apreço pela beleza intrínseca do tema. Newton indubitavelmente experimentou uma sensação de triunfo quando fez suas grandes descobertas. Quero que os estudantes compartilhem um pouco desse entusiasmo.

A ênfase concentra-se na compreensão dos conceitos. Acredito que quase todos concordam que este deve ser o principal objetivo do ensino do cálculo. De fato, o ímpeto para o movimento atual de reforma do cálculo veio da Conferência de Tulane, em 1986, que formulou como primeira recomendação:

Concentrar-se na compreensão de conceitos.

Tentei atingir esse objetivo por meio da *Regra dos Três:* "Os tópicos devem ser apresentados geométrica, numérica e algebricamente". A visualização, a experimentação numérica e gráfica e outras abordagens mudaram o modo como ensinamos o raciocínio conceitual de maneiras fundamentais. A Regra dos Três foi expandida para tornar-se a *Regra dos Quatro*, enfatizando também o ponto de vista verbal ou descritivo.

Ao escrever esta sétima edição, parti da premissa de que é possível alcançar a compreensão conceitual e ainda manter as melhores tradições do cálculo tradicional. O livro contém elementos da reforma, porém, dentro do contexto de uma grade curricular tradicional.

O que há de novo na 7ª edição?

As alterações são resultantes de conversas que tive com meus colegas e alunos da University of Toronto, da leitura de periódicos, bem como de sugestões de leitores e examinadores. Aqui estão algumas das muitas melhorias que incorporei a esta edição:

- Alguns materiais foram reescritos para maior clareza ou melhor motivação. Consulte, por exemplo, a introdução a Valores Máximo e Mínimo no Capítulo 4, a Introdução a Séries no Capítulo 11 e a Motivação Para o Produto Vetorial no Capítulo 12.
- Novos exemplos foram adicionados (consulte o Exemplo 4 da Seção 15.7) e as soluções para alguns dos exemplos existentes foram ampliadas. Adicionei detalhes à resolução do Exemplo 2.3.11, pois, quando ensinei a Seção 2.3 usando a sexta edição, percebi que os alunos precisavam de uma maior orientação ao estabelecerem desigualdades para o Teorema do Confronto.
- O projeto gráfico foi renovado: novas figuras foram incorporadas e uma porcentagem substancial das existentes foi redesenhada.
- Os dados dos exemplos e exercícios foram atualizados para serem mais oportunos.
- Três novos projetos foram adicionados: *O Índice de Gini* (Capítulo 6) explora como medir a distribuição de renda entre os habitantes de um dado país e é uma boa aplicação de áreas entre curvas. (Agradeço a Klaus Volpert por sugerir esse projeto.)
- *Famílias de Curvas Implícitas* investiga as formas mutantes de curvas definidas implicitamente conforme os parâmetros em uma família variam. *Famílias de Curvas Polares* (Capítulo 10) exibe as fascinantes formas de curvas polares e como elas evoluem dentro de uma família.
- A seção sobre a área de superfície do gráfico de uma função de duas variáveis passou a ser a Seção 15.6, para a conveniência de professores que gostam de ensinar esse tópico depois de integrais duplas, embora todo o tratamento da área de superfície permaneça no Capítulo 16.
- Continuo buscando exemplos de como o cálculo se aplica a tantos aspectos do mundo real. Na Seção 14.3, você verá belas imagens da força do campo magnético da Terra e sua segunda derivada vertical calculada a partir da equação de Laplace. Agradeço a Roger Watson por despertar minha atenção para como isso é usado na geofísica e na exploração mineral.
- Mais de 25% dos exercícios de cada capítulo são novos. Eis alguns dos meus favoritos: 1.6.58, 2.6.51, 2.8.13–14, 3.3.56, 3.4.67, 3.5.69–72, 3.7.22, 4.3.86, 5.2.51–53, 6.4.30, 11.2.49–50, 11.10.71–72, 12.1.44, 12.4.43–44.

Aprimoramentos tecnológicos

- A mídia e a tecnologia de apoio ao texto foram aprimoradas para conceder aos professores maior controle sobre seu curso, oferecer uma ajuda extra para lidar com os diferentes níveis de preparação dos estudantes para o curso de cálculo e apoiar a compreensão de conceitos.

  Novos recursos – Enhanced WebAssign incluindo um Cengage YouBook personalizável, revisão *Just in Time*, *Show Your Work,* Answer Evaluator, Personalized Study Plan, Master Its, vídeos de resolução, videoclipes de aulas (com perguntas associadas) e *Visualizing Calculus* (animações TEC com perguntas associadas) – foram desenvolvidos para facilitar a aprendizagem por parte dos estudantes e propiciar um ensino mais flexível na sala de aula.

  Para mais informações sobre como adquirir o cartão de acesso ao Enhanced WebAssign, contate vendas.cengage@cengage.com. Esta ferramenta está disponível em inglês.
- *Tools for Enriching Calculus* (TEC) foram completamente reformuladas e estão disponíveis no Enhanced WebAssign. Auxílios visuais e módulos selecionados estão disponíveis no site do autor. Acesse www.stewartcalculus.com. Na página inicial, clique em Calculus 7E – Early Transcendentals. Você terá acesso a vários recursos: Tópicos adicionais, weblinks e *Homework Hints*, recurso especial que vai ajudá-lo a resolver exercícios selecionados.

Recursos

EXERCÍCIOS CONCEITUAIS A maneira mais importante de promover a compreensão de conceitos é por meio de situações-problema. Para esse fim, concebi diversos tipos de problemas. Alguns conjuntos de exercícios começam com solicitações para explicar os significados dos conceitos básicos da seção. (Consulte, por exemplo, os primeiros exercícios das Seções 2.2, 2.5, 11.2, 14.2 e 14.3.) Da mesma forma, todas as seções de revisão começam com uma Ve-

rificação de Conceitos e um Teste de Verdadeiro ou Falso. Outros exercícios testam a compreensão de conceitos através de gráficos ou tabelas (consulte os Exercícios 2.7.17, 2.8.35–40, 2.8.43–46, 9.1.11–13, 10.1.24–27, 11.10.2, 13.2.1–2, 13.3.33–39, 14.1.1–2, 14.1.32–42, 14.3.3–10, 14.6.1–2, 14.7.3–4, 15.1.5–10, 16.1.11–18, 16.2.17–18 e 16.3.1–2).

Outro tipo de exercício utiliza a descrição verbal para testar a compreensão de conceitos (consulte os Exercícios 2.5.10, 2.8.58, 4.3.63–64 e 7.8.67). Eu particularmente valorizo problemas que combinam e comparam abordagens gráficas, numéricas e algébricas (consulte os Exercícios 2.6.39-40, 3.7.27 e 9.4.2).

EXERCÍCIOS COM DIFICULDADE PROGRESSIVA Cada grupo de exercícios é cuidadosamente classificado, progredindo de exercícios conceituais básicos e problemas que visam ao desenvolvimento de habilidades, até problemas mais desafiadores, envolvendo demonstrações e aplicações.

DADOS REAIS Eu e minha equipe nos empenhamos em pesquisar dados do mundo real em bibliotecas, empresas, órgãos governamentais e na Internet que pudessem apresentar, motivar e ilustrar os conceitos de cálculo. Por esse motivo, muitos exercícios e exemplos lidam com funções definidas por tais dados numéricos ou gráficos. Eles podem ser vistos, por exemplo, na Figura 1 da Seção 1.1 (os sismogramas do terremoto de Northridge), ou no Exercício 2.8.36 (porcentagem da população acima dos 60 anos), Exercício 5.1.16 (velocidade do ônibus espacial *Endeavour*) ou na Figura 4 da Seção 5.4 (consumo de energia elétrica em São Francisco). Funções de duas variáveis são ilustradas por uma tabela de valores do índice de sensação térmica como uma função da temperatura do ar e da velocidade do vento (Exemplo 2 da Seção 14.1). Derivadas parciais são introduzidas na Seção 14.3, examinando uma coluna em uma tabela de valores do índice de conforto térmico (temperatura percebida do ar) como uma função da temperatura real e da umidade relativa. Este exemplo é aprofundado em conexão com aproximações lineares (Exemplo 3 da Seção 14.4). Derivadas direcionais são introduzidas na Seção 14.6 por meio de um mapa de contorno da temperatura para estimar a taxa de mudança da temperatura num trajeto para o leste a partir de Chongqing. Integrais duplas são usadas para estimar a precipitação de neve média no Colorado em 20-21 de dezembro de 2006 (Exemplo 4 da Seção 15.1). Campos vetoriais são introduzidos na Seção 16.1 por representações de campos vetoriais de velocidade real mostrando os padrões do vento da Baía de São Francisco.

PROJETOS Uma maneira de despertar o interesse dos alunos – e facilitar a aprendizagem – é fazer com que trabalhem (às vezes em grupos) em projetos mais aprofundados, que transmitam um verdadeiro sentimento de realização quando completados. Incluí quatro tipos de projetos: os *Projetos Aplicados* visam despertar a imaginação dos estudantes. O projeto após a Seção 9.3 pergunta se uma bola arremessada para cima demora mais para atingir sua altura máxima ou para cair de volta a sua altura original (a resposta pode surpreendê-lo). O projeto após a Seção 14.8 utiliza os multiplicadores de Lagrange para determinar as massas dos três estágios de um foguete de modo a minimizar a massa total ao mesmo tempo permitindo que o foguete atinja a velocidade desejada. Os *Projetos de Laboratório* envolvem tecnologia. O projeto subsequente à Seção 10.2 mostra como usar as curvas de Bézier para desenhar formas que representem letras para uma impressora a laser. Os *Projetos Escritos* exigem que os estudantes comparem os métodos atuais àqueles desenvolvidos pelos fundadores do cálculo – por exemplo, o método criado por Fermat para encontrar as tangentes. Algumas referências são dadas sobre o assunto. Os *Projetos de Descoberta* antecipam resultados a serem discutidos posteriormente ou incentivam a descoberta por meio do reconhecimento de padrões (consulte o projeto após a Seção 7.6). Outros exploram os aspectos da geometria: tetraedros (após a Seção 12.4), hiperesferas (após a Seção 15.7) e interseções de três cilindros (após a Seção 15.8). Projetos adicionais podem ser encontrados no *Manual do Professor* (consulte, por exemplo, o Exercício em Grupo 5.1: Posição de Amostras). O Manual do Professor está disponível, em inglês, na Trilha.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS Os estudantes normalmente têm mais dificuldades naqueles problemas em que não há um único procedimento para se chegar à solução. Acredito que não ocorreram muitos avanços na área de resolução de problemas após a estratégia em quatro estágios proposta por George Polya. Inseri, portanto, uma versão dessa estratégia após o Capítulo 1. Esse método é utilizado explícita e implicitamente em todo o livro. Depois dos demais capítulos, incluí seções denominadas *Problemas Quentes*, apresentando exemplos de como lidar com problemas de cálculo mais desafiadores. Ao selecionar os diversos problemas nessas seções, tentei seguir o conselho dado por David Hilbert: “Um problema matemático deve ser di-

fícil a ponto de nos desafiar, mas não inacessível a ponto de zombar de nossos esforços". Ao propor problemas difíceis em tarefas e provas, costumo corrigi-los de forma diferenciada. Neles, procuro valorizar principalmente as ideias que levam à resposta e o reconhecimento dos princípios de resolução mais relevantes para a solução do problema.

TECNOLOGIA A disponibilidade de tecnologia não diminui – pelo contrário, aumenta – a importância de se entender com clareza os conceitos por trás das imagens na tela. Quando utilizados apropriadamente, computadores e calculadoras gráficas são ferramentas úteis na descoberta e compreensão de tais conceitos. Este livro pode ser utilizado com ou sem o emprego de ferramentas tecnológicas – dois símbolos especiais são usados para indicar precisamente quando um tipo especial de aparelho é necessário. O símbolo indica um exercício que definitivamente requer o uso dessas tecnologias (o que não quer dizer que seu uso nos demais exercícios seja proibido). O símbolo SCA aparece em problemas nos quais são empregados todos os recursos de um sistema de computação algébrica (como o Derive, Maple, Mathematica ou o TI-89/92). Mas a tecnologia não torna lápis e papel obsoletos. Frequentemente, são preferíveis os cálculos e esboços feitos a mão, para ilustrar e reforçar alguns conceitos. Tanto professores quanto estudantes precisam aprender a discernir quando é mais adequado o uso das máquinas ou o cálculo a mão.

TOOLS FOR ENRICHING™ CALCULUS As TEC são um complemento ao livro e destinam-se a enriquecer e complementar seu conteúdo. (Este recurso deve ser acessado pelo Enhanced WebAssign. Desenvolvidas por Harvey Keynes, Dan Clegg, Hubert Hohn e por mim, as TEC utilizam uma abordagem exploradora e de descoberta. Nas seções do livro onde a tecnologia é particularmente apropriada, ícones direcionam os estudantes aos módulos das TEC que oferecem um ambiente laboratorial no qual eles podem explorar o tópico de maneiras diferentes e em diferentes níveis. Os auxílios visuais são animações de figuras no texto; módulos são atividades mais elaboradas e incluem exercícios. Os professores podem optar por se envolver em níveis diferentes, indo desde simplesmente encorajar os estudantes a usar os auxílios visuais e módulos para a exploração independente, até atribuir exercícios específicos a partir daqueles incluídos em cada módulo, ou criar exercícios adicionais, laboratórios e projetos que façam uso dos auxílios visuais e dos módulos.

HOMEWORK HINTS São dicas para os exercícios apresentados na forma de perguntas que tentam imitar um efetivo assistente de ensino; funcionam como um tutor silencioso. Dicas para exercícios selecionados (normalmente de número ímpar) são incluídas em cada seção do livro, indicadas pelo número do exercício em vermelho. Elas foram elaboradas de modo a não revelarem mais do que é minimamente necessário para se fazer progresso. Estão disponíveis aos estudantes em www.stewartcalculus.com e no Enhanced WebAssign. Recurso em inglês.

ENHANCED WEBASSIGN A tecnologia está impactando sobre a forma como a lição de casa é passada aos estudantes, particularmente em classes grandes. O uso da lição de casa on-line está crescendo e sua atratividade depende da facilidade de uso, precisão na correção e confiabilidade. Com esta edição, trabalhamos com a comunidade de cálculo e o WebAssign a fim de desenvolver um sistema de lição de casa on-line mais vigoroso. Até 70% dos exercícios em cada seção podem ser passados como lição de casa on-line, incluindo exercícios de resposta livre, múltipla escolha e formatos de partes múltiplas.

O sistema também inclui Active Examples, nos quais os estudantes são guiados em tutoriais passo a passo através de exemplos do livro, com links para o livro e resoluções em vídeo. Novas melhorias ao sistema incluem um eBook personalizado, um recurso *Show Your Work*, revisão *Just in Time* de pré-requisitos pré-cálculo, um Assignment Editor aperfeiçoado e um Answer Evaluator que aceita mais respostas matematicamente equivalentes e permite a correção da lição de casa de forma bem semelhante àquela feita por um instrutor. Para mais informações sobre como adquirir o cartão de acesso a esta ferramenta, contate: vendas.cengage@cengage.com. Recurso em inglês.

www.stewartcalculus.com O site do autor inclui:

- Homework Hints
- História da Matemática, com links para os melhores *sites* históricos
- Tópicos adicionais (completos, com conjuntos de exercícios): série de Fourier, fórmulas para o resto na série de Taylor, rotação dos eixos

Nota da Editora:
Até o fechamento desta edição, todos os sites contidos neste livro estavam com o funcionamento normal. A Cengage Learning não se responsabiliza pela suspensão dos mesmos.

- Links, para tópicos específicos, para outros recursos da web
- Tools for Enriching Calculus (TEC): para os módulos e auxílios visuais selecionados para os capítulos 2 e 5.

Todo o material disponível no site do autor está em inglês.

Na Trilha
- Problemas de Desafio (para capítulos selecionados, com soluções e respostas)
- Problemas Arquivados para todos os capítulos, com soluções e respostas
- Slides de Power Point®
- Revisão de Álgebra (em inglês)
- Revisão de Geometria Analítica (em inglês)
- Suplemento: *Mentiras que minha calculadora e computador me contaram* com exercícios e soluções
- Manual do professor (material em inglês, para professores que adotam a obra)

Acesso pelo site http://cursosonline.cengage.com.br.

Conteúdo

Testes de Verificação O livro começa com quatro testes de verificação: Álgebra Básica, Geometria Analítica, Funções e Trigonometria.

Uma Apresentação do Cálculo Temos aqui um panorama da matéria, incluindo uma série de questões para nortear o estudo do cálculo.

VOLUME I

1 Funções e Modelos Desde o princípio, a multiplicidade de representações das funções é valorizada: verbal, numérica, visual e algébrica. A discussão dos modelos matemáticos conduz a uma revisão das funções gerais, incluindo as funções exponenciais e logarítmicas, por meio desses quatro pontos de vista.

2 Limites e Derivadas O material sobre limites decorre da discussão prévia sobre os problemas da tangente e da velocidade. Os limites são tratados dos pontos de vista descritivo, gráfico, numérico e algébrico. A Seção 2.4, sobre a definição precisa de limite por meio de epsilons e deltas, é opcional. As Seções 2.7 e 2.8 tratam das derivadas (principalmente com funções definidas gráfica e numericamente) antes da introdução das regras de derivação (que serão discutidas no Capítulo 3). Aqui, os exemplos e exercícios exploram o significado das derivadas em diversos contextos. As derivadas de ordem superior são apresentadas na Seção 2.8.

3 Regras de Derivação Todas as funções básicas, incluindo as exponenciais, logarítmicas e trigonométricas inversas são derivadas aqui. Quando as derivadas são calculadas em situações aplicadas, é solicitado que o aluno explique seu significado. Nesta edição, o crescimento e decaimento exponencial são tratados neste capítulo.

4 Aplicações de Derivação Os fatos básicos referentes aos valores extremos e formas de curvas são deduzidos do Teorema do Valor Médio. O uso de tecnologias gráficas ressalta a interação entre o cálculo e as calculadoras e a análise de famílias de curvas. São apresentados alguns problemas de otimização, incluindo uma explicação de por que precisamos elevar nossa cabeça a 42º para ver o topo de um arco-íris.

5 Integrais Problemas de área e distância servem para apresentar a integral definida, introduzindo a notação de somatória (ou notação sigma) quando necessária (esta notação é estudada de forma mais completa no Apêndice E). Dá-se ênfase à explicação do significado das integrais em diversos contextos e à obtenção de estimativas para seus valores a partir de tabelas e gráficos.

6 Aplicações de Integração Aqui, são apresentadas algumas aplicações de integração – área, volume, trabalho, valor médio – que podem ser feitas sem o uso de técnicas avançadas. Dá-se ênfase aos métodos gerais. O objetivo é que os alunos consigam dividir uma dada quantidade em partes menores, estimar usando somas de Riemann e que sejam capazes de reconhecer o limite como uma integral.

7 Técnicas de Integração Todos os métodos tradicionais são mencionados, mas é claro que o verdadeiro desafio é perceber qual técnica é mais adequada a cada situação. Por esse motivo, na Seção 7.5 apresentamos estratégias para calcular integrais. O uso de sistemas de computação algébrica é discutido na Seção 7.6.

8 Mais Aplicações de Integração Aqui estão as aplicações de integração para as quais é útil dispor de todas as técnicas de integração – área de superfície e comprimento do arco – bem como outras aplicações à biologia, à economia e à física (força hidrostática e centros de massa). Também foi incluída uma seção tratando de probabilidades. Há mais aplicações do que se pode estudar em qualquer curso, assim, o professor deve selecionar aquelas que julgue mais interessantes ou adequadas a seus alunos.

VOLUME II

9 Equações Diferenciais Modelagem é o tema que unifica esse tratamento introdutório de equações diferenciais. Campos direcionais e o método de Euler são estudados antes de as equações separáveis e lineares serem solucionadas explicitamente, de modo que abordagens qualitativas, numéricas e analíticas recebem a mesma consideração. Esses métodos são aplicados aos modelos exponenciais, logísticos dentre outros para o crescimento populacional. As quatro ou cinco primeiras seções deste capítulo servem como uma boa introdução a equações diferenciais de primeira ordem. Uma seção final opcional utiliza os modelos presa-predador para ilustrar sistemas de equações diferenciais.

10 Equações Paramétricas e Coordenadas Polares Este capítulo introduz curvas paramétricas e polares e aplica os métodos de cálculo a elas. As curvas paramétricas são adequadas a projetos laboratoriais; as apresentadas aqui envolvem famílias de curvas e curvas de Bézier. Um breve tratamento de seções cônicas em coordenadas polares prepara o caminho para as Leis de Kepler, no Capítulo 13.

11 Sequências e Séries Infinitas Os testes de convergência possuem justificativas intuitivas, bem como demonstrações formais. Estimativas numéricas de somas de séries baseiam-se em qual teste foi usado para demonstrar a convergência. A ênfase é dada à série de Taylor e aos polinômios e suas aplicações à física. Estimativas de erro incluem aquelas de dispositivos gráficos.

12 Vetores e a Geometria do Espaço O material sobre geometria analítica tridimensional e vetores está dividido em dois capítulos. O Capítulo 12 trata de vetores, produtos escalar e vetorial, retas, planos e superfícies.

13 Funções Vetoriais Aqui, são estudadas as funções a valores vetoriais, suas derivadas e integrais, o comprimento e curvatura de curvas espaciais e a velocidade e aceleração ao longo dessas curvas, finalizando com as Leis de Kepler.

14 Derivadas Parciais As funções de duas ou mais variáveis são estudadas do ponto de vista verbal, numérico, visual e algébrico. As derivadas parciais são introduzidas mediante a análise de uma coluna particular de uma tabela com índices de conforto térmico (temperatura aparente do ar), como função da temperatura medida e da umidade relativa.

15 Integrais Múltiplas Para calcular as médias de temperatura e precipitação de neve em dadas regiões, utilizamos mapas de contorno e a Regra do Ponto Médio. São usadas integrais duplas e triplas no cálculo de probabilidades, área de superfície e, em projetos, do volume de hiperesferas e da interseção de três cilindros. As coordenadas esféricas e cilíndricas são introduzidas no contexto de cálculo de integrais triplas.

16 Cálculo Vetorial A apresentação de campos vetoriais é feita por meio de figuras dos campos de velocidade do vento na Baía de São Francisco. Exploramos também as semelhanças entre o Teorema Fundamental para integrais de linha, o Teorema de Green, o Teorema de Stokes e o Teorema do Divergente.

17 Equações Diferenciais de Segunda Ordem Como as equações diferenciais de primeira ordem foram tratadas no Capítulo 9, este último capítulo trata das equações diferenciais lineares de segunda ordem, sua aplicação em molas vibrantes e circuitos elétricos, e soluções em séries.

Agradecimentos

A preparação desta edição e das anteriores envolveu muito tempo de leitura e conselhos bem fundamentados (porém, às vezes, contraditórios) de um grande número de revisores astutos.

Sou extremamente grato pelo tempo que levaram para compreender minha motivação pela abordagem empregada. Aprendi algo com cada um deles.

REVISORES DA SÉTIMA EDIÇÃO

Amy Austin, *Texas A&M University*
Anthony J. Bevelacqua, *University of North Dakota*
Zhen-Qing Chen, *University of Washington—Seattle*
Jenna Carpenter, *Louisiana Tech University*
Le Baron O. Ferguson, *University of California—Riverside*
Shari Harris, *John Wood Community College*
Amer Iqbal, *University of Washington—Seattle*
Akhtar Khan, *Rochester Institute of Technology*
Marianne Korten, *Kansas State University*
Joyce Longman, *Villanova University*
Richard Millspaugh, *University of North Dakota*
Lon H. Mitchell, *Virginia Commonwealth University*
Ho Kuen Ng, *San Jose State University*
Norma Ortiz-Robinson, *Virginia Commonwealth University*
Qin Sheng, *Baylor University*
Magdalena Toda, *Texas Tech University*
Ruth Trygstad, *Salt Lake Community College*
Klaus Volpert, *Villanova University*
Peiyong Wang, *Wayne State University*

REVISORES DE TECNOLOGIA

Maria Andersen, *Muskegon Community College*
Eric Aurand, *Eastfield College*
Joy Becker, *University of Wisconsin–Stout*
Przemyslaw Bogacki, *Old Dominion University*
Amy Elizabeth Bowman, *University of Alabama in Huntsville*
Monica Brown, *University of Missouri–St. Louis*
Roxanne Byrne, *University of Colorado no Denver and Health Sciences Center*
Teri Christiansen, *University of Missouri–Columbia*
Bobby Dale Daniel, *Lamar University*
Jennifer Daniel, *Lamar University*
Andras Domokos, *California State University, Sacramento*
Timothy Flaherty, *Carnegie Mellon University*
Lee Gibson, *University of Louisville*
Jane Golden, *Hillsborough Community College*
Semion Gutman, *University of Oklahoma*
Diane Hoffoss, *University of San Diego*
Lorraine Hughes, *Mississippi State University*
Jay Jahangiri, *Kent State University*
John Jernigan, *Community College of Philadelphia*
Brian Karasek, *South Mountain Community College*
Jason Kozinski, *University of Florida*
Carole Krueger, *The University of Texas at Arlington*
Ken Kubota, *University of Kentucky*
John Mitchell, *Clark College*
Donald Paul, *Tulsa Community College*
Chad Pierson, *University of Minnesota, Duluth*
Lanita Presson, *University of Alabama in Huntsville*
Karin Reinhold, *State University of New York em Albany*
Thomas Riedel, *University of Louisville*
Christopher Schroeder, *Morehead State University*
Angela Sharp, *University of Minnesota, Duluth*
Patricia Shaw, *Mississippi State University*
Carl Spitznagel, *John Carroll University*
Mohammad Tabanjeh, *Virginia State University*
Capt. Koichi Takagi, *United States Naval Academy*
Lorna TenEyck, *Chemeketa Community College*
Roger Werbylo, *Pima Community College*
David Williams, *Clayton State University*
Zhuan Ye, *Northern Illinois University*

REVISORES DA EDIÇÃO ANTERIOR

B. D. Aggarwala, *University of Calgary*
John Alberghini, *Manchester Community College*
Michael Albert, *Carnegie-Mellon University*
Daniel Anderson, *University of Iowa*
Donna J. Bailey, *Northeast Missouri State University*
Wayne Barber, *Chemeketa Community College*
Marilyn Belkin, *Villanova University*
Neil Berger, *University of Illinois, Chicago*
David Berman, *University of New Orleans*
Richard Biggs, *University of Western Ontario*
Robert Blumenthal, *Oglethorpe University*
Martina Bode, *Northwestern University*
Barbara Bohannon, *Hofstra University*

Philip L. Bowers, *Florida State University*
Amy Elizabeth Bowman, *University of Alabama in Huntsville*
Jay Bourland, *Colorado State University*
Stephen W. Brady, *Wichita State University*
Michael Breen, *Tennessee Technological University*
Robert N. Bryan, *University of Western Ontario*
David Buchthal, *University of Akron*
Jorge Cassio, *Miami-Dade Community College*
Jack Ceder, *University of California, Santa Barbara*
Scott Chapman, *Trinity University*
James Choike, *Oklahoma State University*
Barbara Cortzen, *DePaul University*
Carl Cowen, *Purdue University*
Philip S. Crooke, *Vanderbilt University*
Charles N. Curtis, *Missouri Southern State College*
Daniel Cyphert, *Armstrong State College*
Robert Dahlin
M. Hilary Davies, *University of Alaska Anchorage*
Gregory J. Davis, *University of Wisconsin–Green Bay*
Elias Deeba, *University of Houston–Downtown*
Daniel DiMaria, *Suffolk Community College*
Seymour Ditor, *University of Western Ontario*
Greg Dresden, *Washington and Lee University*
Daniel Drucker, *Wayne State University*
Kenn Dunn, *Dalhousie University*
Dennis Dunninger, *Michigan State University*
Bruce Edwards, *University of Florida*
David Ellis, *San Francisco State University*
John Ellison, *Grove City College*
Martin Erickson, *Truman State University*
Garret Etgen, *University of Houston*
Theodore G. Faticoni, *Fordham University*
Laurene V. Fausett, *Georgia Southern University*
Norman Feldman, *Sonoma State University*
Newman Fisher, *San Francisco State University*
José D. Flores, *The University of South Dakota*
William Francis, *Michigan Technological University*
James T. Franklin, *Valencia Community College, East*
Stanley Friedlander, *Bronx Community College*
Patrick Gallagher, *Columbia University–New York*
Paul Garrett, *University of Minnesota–Minneapolis*
Frederick Gass, *Miami University of Ohio*
Bruce Gilligan, *University of Regina*
Matthias K. Gobbert, *University of Maryland, Baltimore County*
Gerald Goff, *Oklahoma State University*
Stuart Goldenberg, *California Polytechnic State University*
John A. Graham, *Buckingham Browne & Nichols School*
Richard Grassl, *University of New Mexico*
Michael Gregory, *University of North Dakota*
Charles Groetsch, *University of Cincinnati*
Paul Triantafilos Hadavas, *Armstrong Atlantic State University*
Salim M. Haïdar, *Grand Valley State University*
D. W. Hall, *Michigan State University*
Robert L. Hall, *University of Wisconsin–Milwaukee*
Howard B. Hamilton, *California State University, Sacramento*
Darel Hardy, *Colorado State University*
Gary W. Harrison, *College of Charleston*
Melvin Hausner, *New York University/Courant Institute*
Curtis Herink, *Mercer University*
Russell Herman, *University of North Carolina at Wilmington*
Allen Hesse, *Rochester Community College*
Randall R. Holmes, *Auburn University*
James F. Hurley, *University of Connecticut*
Matthew A. Isom, *Arizona State University*
Gerald Janusz, *University of Illinois at Urbana-Champaign*
John H. Jenkins, *Embry-Riddle Aeronautical University, Prescott Campus*
Clement Jeske, *University of Wisconsin, Platteville*
Carl Jockusch, *University of Illinois at Urbana-Champaign*
Jan E. H. Johansson, *University of Vermont*
Jerry Johnson, *Oklahoma State University*
Zsuzsanna M. Kadas, *St. Michael's College*
Nets Katz, *Indiana University Bloomington*
Matt Kaufman
Matthias Kawski, *Arizona State University*
Frederick W. Keene, *Pasadena City College*
Robert L. Kelley, *University of Miami*
Virgil Kowalik, *Texas A&I University*
Kevin Kreider, *University of Akron*
Leonard Krop, *DePaul University*
Mark Krusemeyer, *Carleton College*
John C. Lawlor, *University of Vermont*
Christopher C. Leary, *State University of New York at Geneseo*
David Leeming, *University of Victoria*
Sam Lesseig, *Northeast Missouri State University*
Phil Locke, *University of Maine*
Joan McCarter, *Arizona State University*
Phil McCartney, *Northern Kentucky University*
James McKinney, *California State Polytechnic University, Pomona*
Igor Malyshev, *San Jose State University*
Larry Mansfield, *Queens College*
Mary Martin, *Colgate University*
Nathaniel F. G. Martin, *University of Virginia*
Gerald Y. Matsumoto, *American River College*
Tom Metzger, *University of Pittsburgh*
Michael Montaño, *Riverside Community College*
Teri Jo Murphy, *University of Oklahoma*
Martin Nakashima, *California State Polytechnic University, Pomona*

Richard Nowakowski, *Dalhousie University*
Hussain S. Nur, *California State University, Fresno*
Wayne N. Palmer, *Utica College*
Vincent Panico, *University of the Pacific*
F. J. Papp, *University of Michigan–Dearborn*
Mike Penna, *Indiana University–Purdue University Indianapolis*
Mark Pinsky, *Northwestern University*
Lothar Redlin, *The Pennsylvania State University*
Joel W. Robbin, *University of Wisconsin–Madison*
Lila Roberts, *Georgia College and State University*
E. Arthur Robinson, Jr., *The George Washington University*
Richard Rockwell, *Pacific Union College*
Rob Root, *Lafayette College*
Richard Ruedemann, *Arizona State University*
David Ryeburn, *Simon Fraser University*
Richard St. Andre, *Central Michigan University*
Ricardo Salinas, *San Antonio College*
Robert Schmidt, *South Dakota State University*
Eric Schreiner, *Western Michigan University*
Mihr J. Shah, *Kent State University–Trumbull*
Theodore Shifrin, *University of Georgia*
Wayne Skrapek, *University of Saskatchewan*
Larry Small, *Los Angeles Pierce College*
Teresa Morgan Smith, *Blinn College*
William Smith, *University of North Carolina*
Donald W. Solomon, *University of Wisconsin–Milwaukee*
Edward Spitznagel, *Washington University*
Joseph Stampfli, *Indiana University*
Kristin Stoley, *Blinn College*
M. B. Tavakoli, *Chaffey College*
Paul Xavier Uhlig, *St. Mary's University, San Antonio*
Stan Ver Nooy, *University of Oregon*
Andrei Verona, *California State University–Los Angeles*
Russell C. Walker, *Carnegie Mellon University*
William L. Walton, *McCallie School*
Jack Weiner, *University of Guelph*
Alan Weinstein, *University of California, Berkeley*
Theodore W. Wilcox, *Rochester Institute of Technology*
Steven Willard, *University of Alberta*
Robert Wilson, *University of Wisconsin–Madison*
Jerome Wolbert, *University of Michigan–Ann Arbor*
Dennis H. Wortman, *University of Massachusetts, Boston*
Mary Wright, *Southern Illinois University–Carbondale*
Paul M. Wright, *Austin Community College*
Xian Wu, *University of South Carolina*

Também gostaria de agradecer a Jordan Bell, George Bergman, Leon Gerber, Mary Pugh e Simon Smith por suas sugestões; a Al Shenk e Dennis Zill por autorizarem o uso de exercícios de seus livros de cálculo; à COMAP por autorizar o uso de material do projeto; a George Bergman, David Bleecker, Dan Clegg, Victor Kaftal, Anthony Lam, Jamie Lawson, Ira Rosenholtz, Paul Sally, Lowell Smylie e Larry Wallen pelas ideias para os exercícios; a Dan Drucker pelo projeto da corrida na rampa; a Thomas Banchoff, Tom Farmer, Fred Gass, John Ramsay, Larry Riddle, Philip Straffin e Klaus Volpert pelas ideias para os projetos; a Dan Anderson, Dan Clegg, Jeff Cole, Dan Drucker e Barbara Frank por solucionarem os novos exercícios e sugerirem formas de aprimorá-los; a Marv Riedesel, Mary Johnson e John Manalo pela revisão precisa; e a Jeff Cole e Dan Clegg por sua preparação e revisão cuidadosas do manuscrito de respostas.

Agradeço também àqueles que contribuíram para as edições anteriores: Ed Barbeau, Fred Brauer, Andy Bulman-Fleming, Bob Burton, David Cusick, Tom DiCiccio, Garret Etgen, Chris Fisher, Stuart Goldenberg, Arnold Good, Gene Hecht, Harvey Keynes, E.L. Koh, Zdislav Kovarik, Kevin Kreider, Emile LeBlanc, David Leep, Gerald Leibowitz, Larry Peterson, Lothar Redlin, Carl Riehm, John Ringland, Peter Rosenthal, Doug Shaw, Dan Silver, Norton Starr, Saleem Watson, Alan Weinstein e Gail Wolkowicz.

Também agradeço à Kathi Townes e Stephanie Kuhns, da TECHarts, por seus serviços de produção e à equipe da Brooks/Cole: Cheryll Linthicum, gerente de conteúdo do projeto; Liza Neustaetter, editora assistente; Maureen Ross, editora de mídia; Sam Subity, editor de gerenciamento de mídia; Jennifer Jones, gerente de marketing; e Vernon Boes, diretor de arte. Todos realizaram um trabalho excepcional.

Sou muito privilegiado por ter trabalhado com alguns dos melhores editores matemáticos do mercado durante as três últimas décadas: Ron Munro, Harry Campbell, Craig Barth, Jeremy Hayhurst, Gary Ostedt, Bob Pirtle, Richard Stratton e, agora, Liz Covello. Todos eles contribuíram substancialmente para o sucesso deste livro.

As ferramentas de aprendizagem utilizadas até alguns anos atrás já não atraem os alunos de hoje, que dominam novas tecnologias, mas dispõem de pouco tempo para o estudo. Na realidade, muitos buscam uma nova abordagem. A Trilha está abrindo caminho para uma nova estratégia de aprendizagem e tudo teve início com alguns professores e alunos. Determinados a nos conectar verdadeiramente com os alunos, conduzimos pesquisas e entrevistas. Conversamos com eles para descobrir como aprendem, quando e onde estudam, e por quê. Conversamos, em seguida, com professores para obter suas opiniões. A resposta a essa solução inovadora de ensino e aprendizagem tem sido excelente.

Trilha é uma solução de ensino e aprendizagem diferente de todas as demais!

Os alunos pediram, nós atendemos!

- Problemas de Desafio (para os capítulos selecionados, com soluções e respostas)
- Problemas Arquivados para todos os capítulos, com soluções e respostas
- Slides de Power Point®
- Revisão de Álgebra (em inglês)
- Revisão de Geometria Analítica (em inglês)
- Suplemento: *Mentiras que minha calculadora e computador me contaram* com exercícios e soluções
- Manual do professor (material em inglês, para professores que adotam a obra)

Plataforma de acesso em português e conteúdo em português e em inglês!

Acesse: http://cursosonline.cengage.com.br

Ao Aluno

A leitura de um livro didático de cálculo difere da leitura de um jornal ou de um romance, ou mesmo de um livro de física. Não desanime se precisar ler o mesmo trecho muitas vezes antes de entendê-lo. E, durante a leitura, você deve sempre ter lápis, papel e calculadora à mão, para fazer contas e desenhar diagramas.

Alguns estudantes preferem partir diretamente para os exercícios passados como dever de casa, consultando o texto somente ao topar com alguma dificuldade. Acredito que ler e compreender toda a seção antes de lidar com os exercícios é muito mais interessante. Você deve prestar especial atenção às definições e compreender o significado exato dos termos. E, antes de ler cada exemplo, sugiro que você cubra a solução e tente resolvê-lo sozinho. Assim, será muito mais proveitoso quando você observar a resolução.

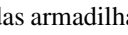
Parte do objetivo deste curso é treiná-lo a pensar logicamente. Procure escrever os estágios da resolução de forma articulada, passo a passo, com frases explicativas – e não somente uma série de equações e fórmulas desconexas.

As respostas da maioria dos exercícios ímpares são dadas ao final do livro, no Apêndice I. Alguns exercícios pedem explicações, interpretações ou descrições por extenso. Em tais casos, não há uma forma única de escrever a resposta, então não se preocupe se a sua ficou muito diferente. Da mesma forma, também há mais de uma maneira de expressar uma resposta algébrica ou numérica. Assim, se a sua resposta diferir daquela que consta no livro, não suponha imediatamente que a sua está errada. Por exemplo, se você chegou em $\sqrt{2} - 1$ e a resposta impressa é $1/(1 + \sqrt{2})$, você está certo, e a racionalização do denominador mostrará que ambas são equivalentes.

O símbolo indica que o exercício definitivamente exige o uso de uma calculadora gráfica ou um computador com software adequado (na Seção 1.4 discutimos o uso desses dispositivos e algumas das armadilhas que você pode encontrar). Mas isso não significa que você não pode utilizar esses equipamentos para verificar seus resultados nos demais exercícios.

O símbolo aparece em problemas nos quais são empregados todos os recursos de um sistema de computação algébrica (como o Derive, Maple, Mathematica ou o TI-89/92).

Outro símbolo com o qual você vai deparar é o , que o alerta para um erro comum. O símbolo registra as situações em que percebi que uma boa parte dos alunos tende a cometer o mesmo erro.

Tools for Enriching Calculus, que são um material de apoio deste livro, são indicadas por meio do símbolo  e podem ser acessadas pelo Enhanced WebAssign (em inglês).

As *Homework Hints* para exercícios representativos são indicadas pelo número do exercício em vermelho: **5.** Essas dicas podem ser encontradas no site stewartcalculus.com, bem como no Enhanced WebAssign (em inglês). As dicas para lições de casa fazem perguntas que lhe permitem avançar em direção à resolução sem lhe dar a resposta. Você precisa seguir cada dica de maneira ativa, com lápis e papel na mão, a fim de elaborar os detalhes. Se determinada dica não permitir que solucione o problema, você pode clicar para revelar a próxima dica.

Recomendo que guarde este livro para fins de referência após o término do curso. Como você provavelmente esquecerá alguns detalhes específicos do cálculo, o livro servirá como um lembrete útil quando precisar usá-lo em cursos subsequentes. E, como este livro contém uma maior quantidade de material que pode ser abordada em qualquer curso, ele também pode servir como um recurso valioso para um cientista ou engenheiro em atuação.

O cálculo é uma matéria fascinante e, com justiça, é considerada uma das maiores realizações da inteligência humana. Espero que você descubra não apenas o quanto esta disciplina é útil, mas também o quão intrinsecamente bela ela é.

Teste de Verificação

O sucesso no cálculo depende em grande parte do conhecimento da matemática que precede o cálculo: álgebra, geometria analítica, funções e trigonometria. Os testes a seguir têm a intenção de diagnosticar falhas que você possa ter nessas áreas. Depois de fazer cada teste, é possível conferir suas respostas com as respostas dadas e, se necessário, refrescar sua memória consultando o material de revisão fornecido.

A Testes de Verificação: Álgebra

1. Avalie cada expressão sem usar uma calculadora.

(a) $(-3)^4$ (b) -3^4 (c) 3^{-4}

(d) $\dfrac{5^{23}}{5^{21}}$ (e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ (f) $16^{-3/4}$

2. Simplifique cada expressão. Escreva sua resposta sem expoentes negativos.

(a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$

(b) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$

(c) $\left(\dfrac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$

3. Expanda e simplifique.

(a) $3(x + 6) + 4(2x - 5)$ (b) $(x + 3)(4x - 5)$

(c) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ (d) $(2x + 3)^2$

(e) $(x + 2)^3$

4. Fatore cada expressão.

(a) $4x^2 - 25$ (b) $2x^2 + 5x - 12$

(c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ (d) $x^4 + 27x$

(e) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ (f) $x^3y - 4xy$

5. Simplifique as expressões racionais.

(a) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ (b) $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 9} \cdot \dfrac{x + 3}{2x + 1}$

(c) $\dfrac{x^2}{x^2 - 4} - \dfrac{x + 1}{x + 2}$ (d) $\dfrac{\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}}{\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}}$

6. Racionalize a expressão e simplifique.

(a) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} - 2}$ (b) $\dfrac{\sqrt{4 + h} - 2}{h}$

7. Reescreva, completando o quadrado.

(a) $x^2 + x + 1$ (b) $2x^2 - 12x + 11$

8. Resolva a equação. (Encontre apenas as soluções reais.)

(a) $x + 5 = 14 - \frac{1}{2}x$ (b) $\dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{2x-1}{x}$

(c) $x^2 - x - 12 = 0$ (d) $2x^2 + 4x + 1 = 0$

(e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (f) $3|x - 4| = 10$

(g) $2x(4 - x)^{-1/2} - 3\sqrt{4 - x} = 0$

9. Resolva cada desigualdade. Escreva sua resposta usando a notação de intervalos.

(a) $-4 < 5 - 3x \leqslant 17$ (b) $x^2 < 2x + 8$

(c) $x(x - 1)(x + 2) > 0$ (d) $|x - 4| < 3$

(e) $\dfrac{2x-3}{x+1} \leqslant 1$

10. Diga se cada equação é verdadeira ou falsa.

(a) $(p + q)^2 = p^2 + q^2$ (b) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$

(c) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ (d) $\dfrac{1 + TC}{C} = 1 + T$

(e) $\dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$ (f) $\dfrac{1/x}{a/x - b/x} = \dfrac{1}{a-b}$

Respostas dos Testes de Verificação A: Álgebra

1. (a) 81 (b) -81 (c) $\frac{1}{81}$
(d) 25 (e) $\frac{9}{4}$ (f) $\frac{1}{8}$

2. (a) $6\sqrt{2}$ (b) $48a^5b^7$ (c) $\dfrac{x}{9y^7}$

3. (a) $11x - 2$ (b) $4x^2 + 7x - 15$
(c) $a - b$ (d) $4x^2 + 12x + 9$
(e) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

4. (a) $(2x - 5)(2x + 5)$ (b) $(2x - 3)(x + 4)$
(c) $(x - 3)(x - 2)(x + 2)$ (d) $x(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$
(e) $3x^{-1/2}(x - 1)(x - 2)$ (f) $xy(x - 2)(x + 2)$

5. (a) $\dfrac{x+2}{x-2}$ (b) $\dfrac{x-1}{x-3}$
(c) $\dfrac{1}{x-2}$ (d) $-(x + y)$

6. (a) $5\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{4+h}+2}$

7. (a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ (b) $2(x - 3)^2 - 7$

8. (a) 6 (b) 1 (c) $-3, 4$
(d) $-1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (e) $\pm 1, \pm\sqrt{2}$ (f) $\frac{2}{3}, \frac{22}{3}$
(g) $\frac{12}{5}$

9. (a) $[-4, 3)$ (b) $(-2, 4)$
(c) $(-2, 0) \cup (1, \infty)$ (d) $(1, 7)$
(e) $(-1, 4]$

10. (a) Falso (b) Verdadeiro (c) Falso
(d) Falso (e) Falso (f) Verdadeiro

Se você tiver dificuldade com estes problemas, consulte a Revisão de Álgebra, "Review of Algebra" no site www.stewartcalculus.com. Material em inglês.

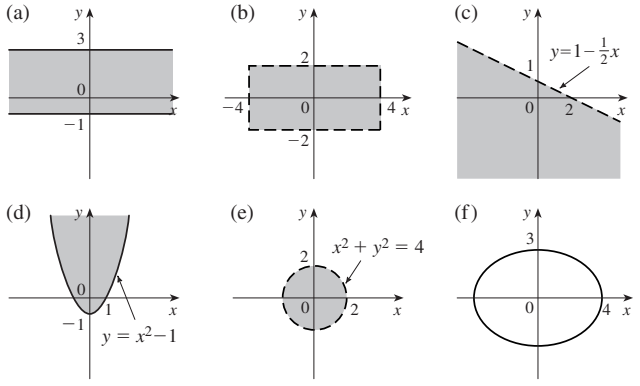
B Testes de Verificação: Geometria Analítica

1. Encontre uma equação para a reta que passa pelo ponto $(2, -5)$ e
   (a) tem inclinação -3
   (b) é paralela ao eixo x
   (c) é paralela ao eixo y
   (d) é paralela à linha $2x - 4y = 3$
2. Encontre uma equação para o círculo que tem centro $(-1, 4)$ e passa pelo ponto $(3, -2)$.
3. Encontre o centro e o raio do círculo com equação $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$.
4. Sejam $A(-7,4)$ e $B(5, -12)$ pontos no plano:
   (a) Encontre a inclinação da reta que contém A e B.
   (b) Encontre uma equação da reta que passa por A e B. Quais são as interseções com os eixos?
   (c) Encontre o ponto médio do segmento AB.
   (d) Encontre o comprimento do segmento AB.
   (e) Encontre uma equação para a mediatriz de AB.
   (f) Encontre uma equação para o círculo para o qual AB é um diâmetro.
5. Esboce as regiões do plano xy definidas pelas equações ou inequações.
   (a) $-1 \leqslant y \leqslant 3$ (b) $|x| < 4$ e $|y| < 2$
   (c) $y < 1 - \frac{1}{2}x$ (d) $y \geqslant x^2 - 1$
   (e) $x^2 + y^2 < 4$ (f) $9x^2 + 16y^2 = 144$

Respostas dos Testes de Verificação B: Geometria Analítica

1. (a) $y = -3x + 1$ (b) $y = -5$
   (c) $x = 2$ (d) $y = \frac{1}{2}x - 6$
2. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 52$
3. Centro $(3, -5)$, raio 5
4. (a) $-\frac{4}{3}$
   (b) $4x + 3y + 16 = 0$; interseção com o eixo x, -4; interseção com o eixo y, $-\frac{16}{3}$
   (c) $(-1, -4)$
   (d) 20
   (e) $3x - 4y = 13$
   (f) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 100$

5.



Se você tiver dificuldade com estes problemas, consulte a Revisão de Geometria Analítica, nos Apêndices B e C.

C Testes de Verificação: Funções

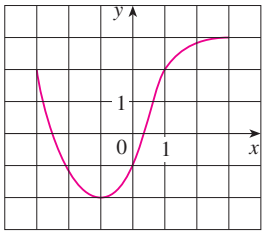


FIGURA PARA O PROBLEMA 1

1. O gráfico de uma função f é dado à esquerda.
(a) Diga o valor de $f(-1)$.
(b) Estime o valor de $f(2)$.
(c) Para quais valores de x vale que $f(x) = 2$?
(d) Estime os valores de x tais que $f(x) = 0$.
(e) Diga qual é o domínio e a imagem de f.

2. Se $f(x) = x^3$, calcule o quociente da diferença $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ e simplifique sua resposta.

3. Encontre o domínio da função.

(a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ (b) $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$ (c) $h(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$

4. Como os gráficos das funções são obtidos a partir do gráfico de f?

(a) $y = -f(x)$ (b) $y = 2f(x) - 1$ (c) $y = f(x-3) + 2$

5. Sem usar uma calculadora, faça um esboço grosseiro do gráfico.

(a) $y = x^3$ (b) $y = (x+1)^3$ (c) $y = (x-2)^3 + 3$
(d) $y = 4 - x^2$ (e) $y = \sqrt{x}$ (f) $y = 2\sqrt{x}$
(g) $y = -2^x$ (h) $y = 1 + x^{-1}$

6. Seja $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(a) Calcule $f(-2)$ e $f(1)$. (b) Esboce o gráfico de f.

7. Se $f(x) = x^2 + 2x - 1$ e $g(x) = 2x - 3$, encontre cada uma das seguintes funções.

(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $g \circ g \circ g$

Respostas dos Testes de Verificação C: Funções

1. (a) -2 (b) 2,8
(c) -3, 1 (d) $-2{,}5$, 0,3
(e) $[-3, 3]$, $[-2, 3]$

2. $12 + 6h + h^2$

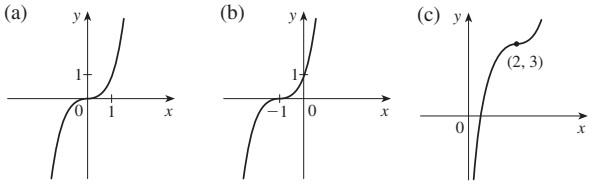
3. (a) $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$

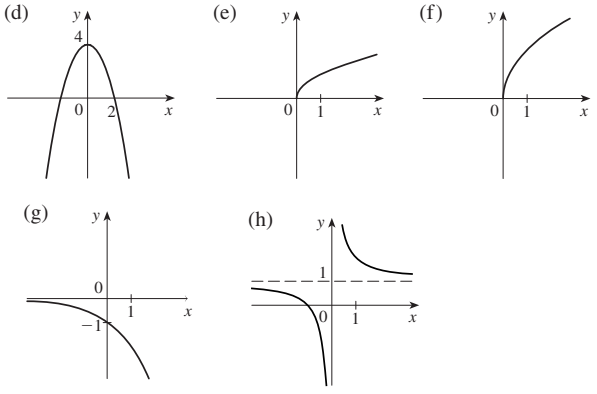
(b) $(-\infty, \infty)$

(c) $(-\infty, -1] \cup [1, 4]$

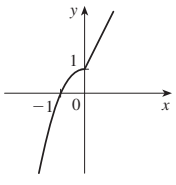
4. (a) Refletindo em torno do eixo x.
(b) Expandindo verticalmente por um fator 2, a seguir transladando 1 unidade para baixo.
(c) Transladando 3 unidades para a direita e 2 unidades para cima.

5.





6. (a) -3, 3
(b)



7. (a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 8x + 2$
(b) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 4x - 5$
(c) $(g \circ g \circ g)(x) = 8x - 21$

Se você tiver dificuldade com estes problemas, consulte as seções 1.1 a 1.3 deste livro.

D Testes de Verificação: Trigonometria

1. Converta de graus para radianos.
   (a) 300° (b) $-18°$
2. Converta de graus para radianos.
   (a) $5\pi/6$ (b) 2
3. Encontre o comprimento de um arco de um círculo de raio 12 cm, cujo ângulo central é 30°.
4. Encontre os valores exatos.
   (a) $\operatorname{tg}(\pi/3)$ (b) $\operatorname{sen}(7\pi/6)$ (c) $\sec(5\pi/3)$
5. Expresse os comprimentos a e b na figura em termos de θ.

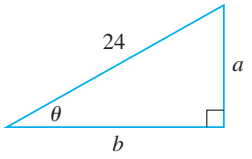


FIGURA PARA O PROBLEMA 5

6. Se $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ e $\sec y = \frac{5}{4}$, onde x e y estão entre 0 e $\pi/2$, avalie $\operatorname{sen}(x + y)$.
7. Demonstre as identidades.
   (a) $\operatorname{tg}\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \sec\theta$
   (b) $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{sen} 2x$
8. Encontre todos os valores de x tais que $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$ e $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$
9. Esboce o gráfico da função $y = 1 + \operatorname{sen} 2x$ sem usar uma calculadora.

Respostas dos Testes de Verificação D: Trigonometria

1. (a) $5\pi/3$ (b) $-\pi/10$
2. (a) 150° (b) $360/\pi \approx 114{,}6°$
3. 2π cm
4. (a) $\sqrt{3}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 2
5. (a) $24 \operatorname{sen}\theta$ (b) $24\cos\theta$
6. $\frac{1}{15}\left(4 + 6\sqrt{2}\right)$
7. No caso de uma demonstração, todo o raciocínio é a resposta; o nível está correto com o de pré-cálculo.
8. $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3, 2\pi$
9.

Se você tiver dificuldade com estes problemas, consulte o Apêndice D deste livro.

Uma Apresentação do Cálculo

Ziga Camernik/Shutterstock

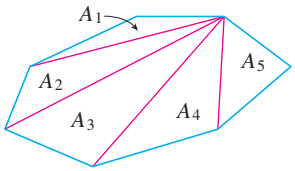
Pichugin Dmitry/Shutterstock

Quando terminar este curso, você será capaz de estimar o número de trabalhadores necessários para construir uma pirâmide, explicar a formação e localização de arcos-íris, projetar uma montanha-russa para que ela trafegue suavemente e calcular a força sobre um dique.

Brett Mulcahy/Shutterstock

iofoto/Shutterstock

O cálculo é fundamentalmente diferente da matemática que você já estudou. Ele é menos estático e mais dinâmico. Trata de variação e de movimento, bem como de quantidades que tendem a outras quantidades. Por essa razão, pode ser útil ter uma visão geral do assunto antes de começar um estudo mais aprofundado. Vamos dar aqui uma olhada em algumas das principais ideias do cálculo, mostrando como surgem os limites quando tentamos resolver diversos problemas.



$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

FIGURA 1

O Problema da Área

As origens do cálculo remontam à Grécia antiga, pelo menos 2.500 anos atrás, quando foram encontradas áreas usando o chamado "método da exaustão". Naquela época, os gregos já sabiam encontrar a área A de qualquer polígono dividindo-o em triângulos, como na Figura 1 e, em seguida, somando as áreas obtidas.

É muito mais difícil achar a área de uma figura curva. O método da exaustão dos antigos gregos consistia em inscrever e circunscrever a figura com polígonos e, então, aumentar o número de lados deles. A Figura 2 ilustra esse procedimento no caso especial de um círculo, com polígonos regulares inscritos.

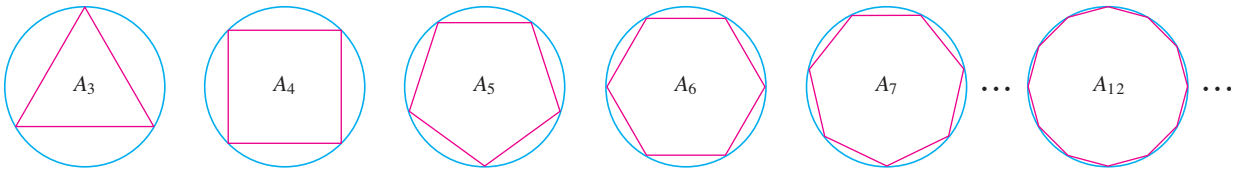


FIGURA 2

Seja A_n a área do polígono inscrito com n lados. À medida que aumentamos n, fica evidente que A_n ficará cada vez mais próxima da área do círculo. Dizemos, então, que a área do círculo é o *limite* das áreas dos polígonos inscritos e escrevemos

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

TEC Na Pré-Visualização, você pode ver como áreas de polígonos inscritos e circunscritos aproximam-se da área de um círculo.

Os gregos, porém, não usaram explicitamente limites. Todavia, por um raciocínio indireto, Eudoxo (século V a.C.) usa o método da exaustão para demonstrar a conhecida fórmula da área do círculo: $A = \pi r^2$.

Usaremos uma ideia semelhante no Capítulo 5 para encontrar a área de regiões do tipo mostrado na Figura 3. Vamos aproximar a área desejada A por áreas de retângulos (como na Figura 4), fazer decrescer a largura dos retângulos e, então, calcular A como o limite dessas somas de áreas de retângulos.

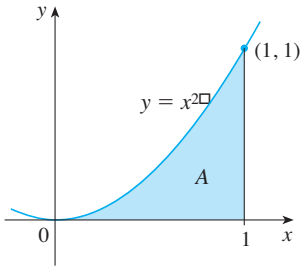


FIGURA 3

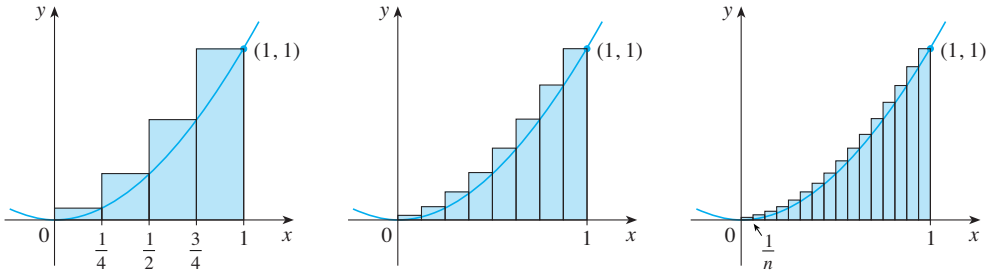


FIGURA 4

O problema da área é central no ramo do cálculo chamado *cálculo integral*. As técnicas que desenvolveremos no Capítulo 5 para encontrar áreas também possibilitarão o cálculo do volume de um sólido, o comprimento de um arco, a força da água sobre um dique, a massa e o centro de gravidade de uma barra e o trabalho realizado ao se bombear a água para fora de um tanque.

O Problema da Tangente

Considere o problema de tentar determinar a reta tangente t a uma curva com equação $y = f(x)$, em um dado ponto P. (Daremos uma definição precisa de reta tangente no Capítulo 2. Por ora, você pode pensá-la como a reta que toca a curva em P, como na Figura 5.) Uma vez que sabemos ser P um ponto sobre a reta tangente, podemos encontrar a equação de t se conhecermos sua inclinação m. O problema está no fato de que, para calcular a inclinação, é necessário conhecer dois pontos e, sobre t, temos somente o ponto P. Para contornar esse problema, determinamos primeiro uma aproximação para m, tomando sobre a curva um ponto próximo Q e calculando a inclinação m_{PQ} da reta secante PQ. Da Figura 6, vemos que

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \boxed{1}$$

Imagine agora o ponto Q movendo-se ao longo da curva em direção a P, como na Figura 7. Você pode ver que a reta secante gira e aproxima-se da reta tangente como sua posição-limite. Isso significa que a inclinação m_{PQ} da reta secante fica cada vez mais próxima da inclinação m da reta tangente. Isso é denotado por

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

e dizemos que m é o limite de m_{PQ} quando Q tende ao ponto P ao longo da curva. Uma vez que x tende a a quando Q tende a P, também podemos usar a Equação 1 para escrever

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \boxed{2}$$

Exemplos específicos desse procedimento serão dados no Capítulo 2.

O problema da tangente deu origem ao ramo do cálculo chamado *cálculo diferencial*, que só foi inventado mais de 2 mil anos após o cálculo integral. As principais ideias por trás do cálculo diferencial devem-se ao matemático francês Pierre Fermat (1601-1665) e foram desenvolvidas pelos matemáticos ingleses John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677) e Isaac Newton (1642-1727) e pelo matemático alemão Gottfried Leibniz (1646-1716).

Os dois ramos do cálculo e seus problemas principais, o da área e o da tangente, apesar de parecerem completamente diferentes, têm uma estreita conexão. Os problemas da área e da tangente são problemas inversos, em um sentido que será explicado no Capítulo 5.

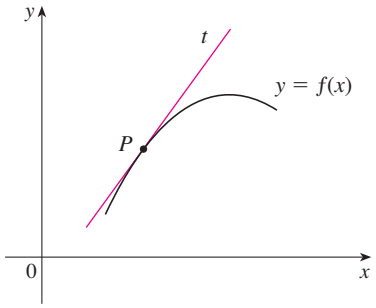


FIGURA 5
A reta tangente em P

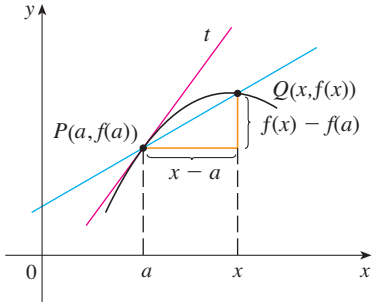


FIGURA 6
A reta secante PQ

Velocidade

Quando olhamos no velocímetro de um carro e vemos que ele está a 48 km/h, o que essa informação indica? Sabemos que, se a velocidade permanecer constante, após uma hora o carro terá percorrido 48 km. Porém, se a velocidade do carro variar, qual o significado de a velocidade ser, em um dado momento, 48 km/h?

Para analisar essa questão, vamos examinar o movimento de um carro percorrendo uma estrada reta e supodo que possamos medir a distância percorrida por ele (em metros) em intervalos de 1 segundo, como na tabela a seguir:

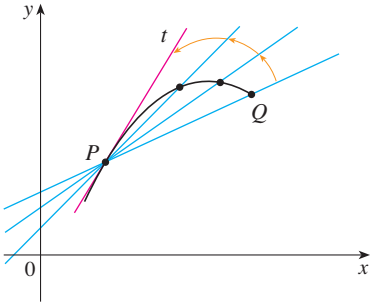


FIGURA 7
Retas secantes aproximando-se da reta tangente

t = Tempo decorrido (s)	0	2	4	6	8	10
d = Distância (m)	0	2	10	25	43	78

Como primeiro passo para encontrar a velocidade após 4 segundos de movimento, calcularemos qual a velocidade média no intervalo de tempo $4 \leqslant t \leqslant 8$:

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}}$$

$$= \frac{43 - 10}{8 - 4}$$

$$= 8{,}25 \text{ m/s}$$

Analogamente, a velocidade média no intervalo $4 \leqslant t \leqslant 6$ é

$$\text{velocidade média} = \frac{25 - 10}{6 - 4} = 7{,}5 \text{ m/s}$$

Nossa intuição é de que a velocidade no instante $t = 4$ não pode ser muito diferente da velocidade média durante um pequeno intervalo de tempo que começa em $t = 4$. Assim, imaginaremos que a distância percorrida foi medida em intervalos de 0,2 segundo, como na tabela a seguir:

t	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0
d	10,00	11,02	12,16	13,45	14,96	16,80

Então, podemos calcular, por exemplo, a velocidade média no intervalo de tempo [4, 5]:

$$\text{velocidade média} = \frac{16{,}80 - 10{,}00}{5 - 4} = 6{,}8 \text{ m/s}$$

Os resultados desses cálculos estão mostrados na tabela:

Intervalo de tempo	[4, 6]	[4, 5]	[4, 4,8]	[4, 4,6]	[4, 4,4]	[4, 4,2]
Velocidade média (m/s)	7,5	6,8	6,2	5,75	5,4	5,1

As velocidades médias em intervalos cada vez menores parecem ficar cada vez mais próximas de 5; dessa forma, esperamos que exatamente em $t = 4$ a velocidade seja cerca de 5 m/s. No Capítulo 2 definiremos a velocidade instantânea de um objeto em movimento como o limite das velocidades médias em intervalos de tempo cada vez menores.

Na Figura 8, mostramos uma representação gráfica do movimento de um carro traçando a distância percorrida como uma função do tempo. Se escrevermos $d = f(t)$, então $f(t)$ é o número de metros percorridos após t segundos. A velocidade média no intervalo de tempo $[4, t]$ é

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{f(t) - f(4)}{t - 4}$$

que é a mesma coisa que a inclinação da reta secante PQ da Figura 8. A velocidade v quando $t = 4$ é o valor-limite da velocidade média quando t aproxima-se de 4; isto é,

$$v = \lim_{t \to 4} \frac{f(t) - f(4)}{t - 4}$$

e, da Equação 2, vemos que isso é igual à inclinação da reta tangente à curva em P.

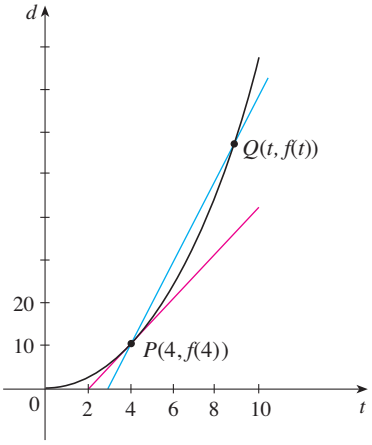


FIGURA 8

Dessa forma, ao resolver o problema da tangente em cálculo diferencial, também estamos resolvendo problemas relativos à velocidade. A mesma técnica se aplica a problemas relativos à taxa de variação nas ciências naturais e sociais.

O Limite de uma Sequência

No século V a.C., o filósofo grego Zenão propôs quatro problemas, hoje conhecidos como *Paradoxos de Zenão*, com o intento de desafiar algumas das ideias correntes em sua época sobre espaço e tempo. O segundo paradoxo de Zenão diz respeito a uma corrida entre o herói grego Aquiles e uma tartaruga para a qual foi dada uma vantagem inicial. Zenão argumentava que Aquiles jamais ultrapassaria a tartaruga: se ele começasse em uma posição a_1 e a tartaruga em t_1 (veja a Figura 9), quando ele atingisse o ponto $a_2 = t_1$, a tartaruga estaria adiante, em uma posição t_2. No momento em que Aquiles atingisse $a_3 = t_2$, a tartaruga estaria em t_3. Esse processo continuaria indefinidamente e, dessa forma, aparentemente a tartaruga estaria sempre à frente! Todavia, isso desafia o senso comum.

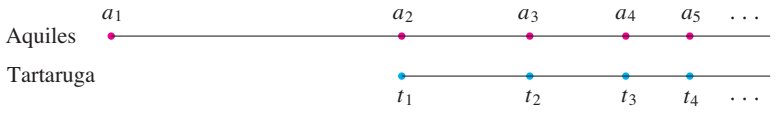


FIGURA 9

Uma forma de explicar esse paradoxo usa a ideia de *sequência*. As posições sucessivas de Aquiles e da tartaruga são respectivamente $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ e $(t_1, t_2, t_3, \ldots)$, conhecidas como sequências.

Em geral, uma sequência $\{a_n\}$ é um conjunto de números escritos em uma ordem definida. Por exemplo, a sequência

$$\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots\}$$

pode ser descrita pela seguinte fórmula para o n-ésimo termo:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Podemos visualizar essa sequência marcando seus termos sobre uma reta real, como na Figura 10(a), ou desenhando seu gráfico, como na Figura 10(b). Observe em ambas as figuras que os termos da sequência $a_n = 1/n$ tornam-se cada vez mais próximos de 0 à medida que n cresce. De fato, podemos encontrar termos tão pequenos quanto desejarmos, bastando para isso tomarmos n suficientemente grande. Dizemos, então, que o limite da sequência é 0 e indicamos isso por

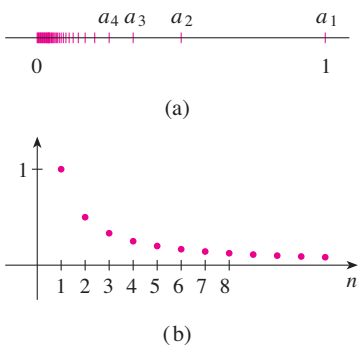


FIGURA 10

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Em geral, a notação

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

será usada se os termos a_n tendem a um número L quando n torna-se grande. Isso significa que podemos tornar os números a_n tão próximos de L quanto quisermos escolhendo um n suficientemente grande.

O conceito de limite de uma sequência ocorre sempre que usamos a representação decimal de um número real. Por exemplo, se

$$a_1 = 3{,}1$$
$$a_2 = 3{,}14$$
$$a_3 = 3{,}141$$
$$a_4 = 3{,}1415$$
$$a_5 = 3{,}14159$$
$$a_6 = 3{,}141592$$
$$a_7 = 3{,}1415926$$
$$\vdots$$

então, $\lim_{n \to \infty} a_n = \pi$.

Os termos nessa sequência são aproximações racionais de π.

Vamos voltar ao paradoxo de Zenão. As posições sucessivas de Aquiles e da tartaruga formam as sequências $\{a_n\}$ e $\{t_n\}$, onde $a_n < t_n$ para todo n. Podemos mostrar que ambas as sequências têm o mesmo limite:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = p = \lim_{n \to \infty} t_n.$$

É precisamente nesse ponto p que Aquiles ultrapassa a tartaruga.

A Soma de uma Série

Outro paradoxo de Zenão, conforme nos foi passado por Aristóteles, é o seguinte: "Uma pessoa em certo ponto de uma sala não pode caminhar diretamente até a parede. Para fazer isso ela deveria percorrer metade da distância, depois a metade da distância restante e, então, no-

vamente a metade da distância que restou e assim por diante, de forma que o processo pode ser sempre continuado e não terá um fim". (Veja a Figura 11.)

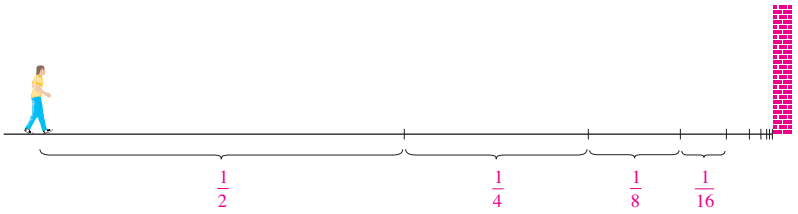


FIGURA 11

Como naturalmente sabemos que de fato a pessoa pode chegar até a parede, isso sugere que a distância total possa ser expressa como a soma de infinitas distâncias cada vez menores, como a seguir:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \quad \boxed{3}$$

Zenão argumentava que não fazia sentido somar um número infinito de números. Porém, há situações em que fazemos implicitamente somas infinitas. Por exemplo, na notação decimal, o símbolo, $0,\overline{3} = 0,3333\ldots$ significa

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10,000} + \cdots$$

dessa forma, em algum sentido, deve ser verdade que

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10,000} + \cdots = \frac{1}{3}$$

Mais geralmente, se d_n denotar o n-ésimo algarismo na representação decimal de um número, então,

$$0, d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} + \cdots$$

Portanto, algumas somas infinitas, ou, como são chamadas, séries infinitas, têm um significado. Todavia, é necessário definir cuidadosamente o que é a soma de uma série.

Retornando à série da Equação 3, denotamos por s_n a soma dos n primeiros termos da série. Assim,

$$s_1 = \tfrac{1}{2} = 0,5$$

$$s_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0,75$$

$$s_3 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 0,875$$

$$s_4 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = 0,9375$$

$$s_5 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} = 0,96875$$

$$s_6 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} = 0,984375$$

$$s_7 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} = 0,9921875$$

$$\vdots$$

$$s_{10} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{1024} \approx 0,99902344$$

$$\vdots$$

$$s_{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{16}} \approx 0{,}99998474.$$

Observe que à medida que somamos mais e mais termos, as somas parciais ficam cada vez mais próximas de 1. De fato, pode-se mostrar que tomando um n suficientemente grande (isto é, adicionando um número suficientemente grande de termos da série), podemos tornar a soma parcial s_n tão próxima de 1 quanto quisermos. Parece, então, razoável dizer que a soma da série infinita é 1 e escrever

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Em outras palavras, a razão de a soma da série ser 1 é que

$$\lim_{n \to \infty} s_n = 1$$

No Capítulo 11, Volume II, discutiremos mais sobre essas noções. Usaremos, então, a ideia de Newton de combinar séries infinitas com cálculo diferencial e integral.

Resumo

Vimos que o conceito de limite surge de problemas tais como encontrar a área de uma região, a tangente a uma curva, a velocidade de um carro ou a soma de uma série infinita. Em cada um dos casos, o tema comum é o cálculo de uma quantidade como o limite de outras quantidades mais facilmente calculáveis. É essa ideia básica que coloca o cálculo à parte de outras áreas da matemática. Na realidade, poderíamos definir o cálculo como o ramo da matemática que trata de limites.

Depois de inventar sua versão de cálculo, Sir Isaac Newton usou-a para explicar o movimento dos planetas em torno do Sol. Hoje, o cálculo é usado na determinação de órbitas de satélites e naves espaciais, na predição do tamanho de uma população, na estimativa de quão rápido os preços do petróleo subem ou caem, na previsão do tempo, na medida do fluxo sanguíneo que sai do coração, no cálculo dos prêmios dos seguros de vida e em uma grande variedade de outras áreas. Neste livro vamos explorar algumas dessas aplicações do cálculo.

Para transmitir uma noção da potência dessa matéria, finalizaremos esta apresentação com uma lista de perguntas que você poderá responder usando o cálculo:

1. Como você explicaria o fato, ilustrado na Figura 12, de que o ângulo de elevação de um observador até o ponto mais alto em um arco-íris é 42º?
2. Como você poderia explicar as formas das latas nas prateleiras de um supermercado?
3. Qual o melhor lugar para se sentar em um cinema?
4. Como podemos projetar uma montanha-russacom um percurso suave?
5. A qual distância de um aeroporto um piloto deve começar a descida para o pouso?
6. Como podemos juntar curvas para desenhar formas que representam letras em uma impressora a *laser*?
7. Como podemos estimar o número de trabalhadores que foram necessários para a construção da Grande Pirâmide de Quéops, no antigo Egito?
8. Onde um jogador deveria se posicionar para apanhar uma bola de beisebol lançada por outro jogador e mandá-la para a *home plate*?
9. Uma bola lançada para cima leva mais tempo para atingir sua altura máxima ou para cair de volta à sua altura original?
10. Como você pode explicar o fato de planetas e satélites se moverem em órbitas elípticas?
11. Como você pode distribuir o escoamento de água entre as turbinas de uma usina hidrelétrica de modo a maximizar a energia total produzida?
12. Se uma bola de gude, uma bola de *squash*, uma barra de aço e um cano de ferro rolarem por uma encosta, qual deles atingirá o fundo primeiro?

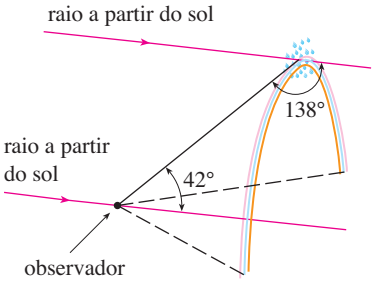


FIGURA 12